SOBRE LAS APLICACIONES DE R^n EN R^m UTILIZANDO EL JACOBIANO

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ

Estudiamos aquí las condiciones básicas de diferenciabilidad de las funciones definidas desde R^n en R^m. Para ello usaremos la matriz jacobiana constituida por las derivadas parciales de las funciones componentes de la aplicación dada, y las propiedades de su determinante, el jacobiano.

Consideraremos las funciones $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ definidas de R^n en R^m, en donde las f_i son funciones de R^n en R: $\forall \vec{x} \in S \subseteq R^n,\ f_i(\vec{x}) = y_i \in R$. Es decir, si es $S \subseteq R^n$ el dominio de la función $\vec{f}$:

$$\forall \vec{x} \in S,\ \vec{f}(\vec{x}) = (f_1, \ldots, f_m)(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \ldots, f_m(\vec{x})) = (y_1, \ldots, y_m) \in R^m$$

1. Diferenciabilidad:

Definición de diferenciabilidad:

La función $\vec{f} : R^n \to R^m$ es diferenciable en $\vec{x}$ si existe una función $Df(\vec{x}) : R^n \to R^m$, que llamaremos *diferencial de* $\vec{f}$ *en* $\vec{x}$, que verifica las dos condiciones siguientes:

a) $Df(\vec{x}) : R^n \to R^m$ es una aplicación lineal:

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in R^n,\ \forall \lambda_a, \lambda_b \in R,\ Df(\vec{x})(\lambda_a \vec{a} + \lambda_b \vec{b}) = \lambda_a . Df(\vec{x})(\vec{a}) + \lambda_b Df(\vec{x})(\vec{b})$$

b) Existe una función $E(\vec{x}; \vec{\alpha}) : R^n \to R^m$, definida en un entorno $N(\vec{x})$ de $\vec{x}$ tal que :

$$\vec{f}(\vec{x} + \vec{\alpha}) = \vec{f}(\vec{x}) + Df(\vec{x})(\vec{\alpha}) + \|\vec{\alpha}\| . E(\vec{x}; \vec{\alpha}), \quad siendo \quad \lim_{\vec{\alpha} \to 0} E(\vec{x}; \vec{\alpha}) = 0$$

o, equivalentemente:

$$\lim_{\vec{\alpha} \to 0} \frac{\vec{f}(\vec{x} + \vec{\alpha}) - \vec{f}(\vec{x}) - Df(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|} = 0$$

Con la notación $\vec{f} \in D\ en\ \vec{x}$ indicaremos que la función $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}$.

Definición de diferenciabilidad con continuidad:

La función $\vec{f}: R^n \to R^m$ es diferenciable con continuidad en $\vec{x} = (x_1,...,x_n) \in R^n$ si existen y son continuas las derivadas parciales

$$D_k f_i(\vec{x}) = \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_k},\ \ i = 1,...m,\ \ k = 1,...,n\ .$$

Denotaremos esto así: $\vec{f} \in C^1\ en\ \vec{x}.$

Teorema 1:

La función $\vec{f}: R^n \to R^m$ es diferenciable en $\vec{x}$ si, y solo si, existen las diferenciales de cada una de las funciones $f_i: R^n \to R$.

Demostración:

Se trata de probar que $\vec{f} \in D\ en\ \vec{x} \Leftrightarrow f_i \in D, i = 1,...,m$. Para probar la equivalencia probemos las dos implicaciones de contrario sentido:

a) $\vec{f} \in D\ en\ \vec{x} \Rightarrow f_i \in D, i = 1,...,m$:

se tiene que

$$\vec{f} \in D\ en\ \vec{x} \Rightarrow \lim \frac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{\alpha}) - \vec{f}(\vec{x}) - D\vec{f}(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|} = 0,\ para\ \|\vec{\alpha}\| \to 0$$

y siendo

$$\frac{f_i(\vec{x}+\vec{\alpha}) - f_i(\vec{x}) - Df_i(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|} \leq \frac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{\alpha}) - \vec{f}(\vec{x}) - D\vec{f}(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|} \wedge$$

$$\wedge \lim \frac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{\alpha}) - \vec{f}(\vec{x}) - D\vec{f}(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|} = 0,\ para\ \|\vec{\alpha}\| \to 0$$

se deduce que es

$$\lim \frac{f_i(\vec{x}+\vec{\alpha}) - f_i(\vec{x}) - Df_i(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|} = 0, i = 1,...,m,\ para\ \|\vec{\alpha}\| \to 0$$

con lo cual $f_i \in D, i = 1,...,m$

b) $f_i \in D, i = 1,...,m \Rightarrow \vec{f} \in D\ en\ \vec{x}$:

$$f_i \in D, i=1,...,m \Rightarrow \lim \frac{f_i(\vec{x}+\vec{\alpha})-f_i(\vec{x})-Df_i(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|}=0,\ i=1,...,m,\ para \|\vec{\alpha}\| \to 0$$

con lo cual será, para $\|\vec{\alpha}\| \to 0$:

$$\lim \frac{\vec{f}(\vec{x}+\vec{\alpha})-\vec{f}(\vec{x})-D\vec{f}(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|}=$$

$$=\left(\lim \frac{f_1(\vec{x}+\vec{\alpha})-f_1(\vec{x})-Df_1(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|},...,\lim \frac{f_m(\vec{x}+\vec{\alpha})-f_m(\vec{x})-Df_m(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|}\right)=(0,...,0)=\vec{0}$$

y en definitiva es $\vec{f} \in D\ en\ \vec{x}$

Si las funciones $f_i \in D, i=1,...,m$ son diferenciables, pueden expresarse, usando las derivadas parciales $D_k f_i(\vec{x})=\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_k},\ i=1,...m,\ k=1,...,n$ en la forma:

$$Df_i(\vec{x})=D_1 f_i(\vec{x}).dx_1+...+D_n f_i(\vec{x}).dx_n$$

o bien

$$Df_i(\vec{x})=\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_1}.dx_1+...+\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_n}.dx_n$$

con lo cual, la diferencial de la función $\vec{f}:R^n \to R^m$, también diferenciable por el anterior teorema, vendría expresada matricialmente por

$$D\vec{f}(\vec{x})=\begin{pmatrix} Df_1(\vec{x}) \\ ... \\ ... \\ Df_m(\vec{x}) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_1} & ... & \frac{\partial f_m(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} dx_1 \\ ... \\ ... \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Teorema 2:

Si $\vec{f}$ es diferenciable con continuidad en $\vec{x}$, entonces $\vec{f}$ es diferenciable en $\vec{x}$. Esto es:

$$\vec{f} \in C^1\ en\ \vec{x} \Rightarrow \vec{f} \in D\ en\ \vec{x}$$

Demostración:

$$\vec{f} \in C^1 \ en \ \vec{x} \Rightarrow D_x f_i(\vec{x}), i = 1,...,m, \ k = 1,...,n \ continuas \Rightarrow Df_i(\vec{x}), i = 1,...,m \ continua \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f_i(\vec{x}+\vec{\alpha}) - f_i(\vec{x}) - Df_i(\vec{x})(\vec{\alpha})}{\|\vec{\alpha}\|} = 0 \Rightarrow f_i \in D \ en \ \vec{x}, i = 1,...,m \Rightarrow \vec{f} \in D \ en \ \vec{x}$$

2. Jacobiano

Definición de Jacobiano:

Sea $S_0 \subseteq R^n$ el dominio contenido en R^n en donde existen las derivadas parciales de las funciones $f_k, k = 1,...,n$. Se define el jacobiano de la función $\vec{f} = (f_1,..., f_n), \forall \vec{x} \in S_0$ como el determinante

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Teorema 3 (Teorema del producto de jacobianos):

Dadas las funciones

$$\begin{matrix} \vec{f} : R^n \to R^n, & \forall x \in S \subseteq R^n, \vec{f}(\vec{x}) \in R^n \\ \vec{g} : R^n \to R^n, & \forall x \in T \subseteq R^n, \vec{g}(\vec{x}) \in R^n \end{matrix}$$ donde es $\vec{f}(S) \subseteq T$

y dada $\vec{h}$, función compuesta de ambas:

$$\vec{h} : R^n \to R^n, \forall \vec{x} \in S \subseteq R^n, \vec{h}(\vec{x}) = \vec{g}\left[\vec{f}(\vec{x})\right] \in R^n$$

se cumple que:

$$J_{\vec{h}}(\vec{x}) = J_{\vec{g}}\left(\vec{f}(\vec{x})\right) J_{\vec{f}}(\vec{x})$$

Demostración:

Por la regla de la cadena, se tiene:

$$\begin{matrix} \vec{f} \in D \ en \ \vec{x} \in S \\ \vec{g} \in D \ en \ \vec{f}(\vec{x}) \in \vec{f}(S) \end{matrix} \Rightarrow \vec{h} \in D \ en \ x \in S \wedge \frac{\partial h_i(\vec{x})}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i(\vec{f}(\vec{x}))}{\partial x_k} . \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}$$

y, al efectuar el producto de los jacobianos, aparece:

$$J_{\vec{g}}\left(\vec{f}(\vec{x})\right).J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \left|\frac{\partial g_i(\vec{f}(\vec{x}))}{\partial x_j}\right| . \left|\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_j}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_i(\vec{f}(\vec{x}))}{\partial x_k}.\frac{\partial f_k(\vec{x})}{\partial x_j}\right| = \left|\frac{\partial h_i(\vec{x})}{\partial x_j}\right| = J_{\vec{h}}(\vec{x})$$

(Nota: hemos utilizado la propiedad matricial de que el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes: $|A.B| = |A|.|B|$)

Desde el rango de la matriz jacobiana, $r\left\lfloor J_{\vec{f}}(\vec{x})\right\rfloor$, se deducen importantes consecuencias sobre el carácter de la función vectorial $f : R^n \rightarrow R^m$ que la genera, consecuencias que permitirán, por ejemplo, probar los grandes teoremas de la función inversa y de la función implícita. Vemos a continuación dos teoremas de caracterización mediante el jacobiano, en los que se muestran estos resultados.

Teorema 4:

Sea K una esfera abierta contenida en R^n centrada en $\vec{x}_0$.

Sea $f : R^n \rightarrow R^m$ una función vectorial que cumple:

a) Es continua en K.
b) Existen todas las derivadas $D_j f_i(\vec{x})$ en todo punto $\vec{x} \in K$.
c) Es uno a uno en K.

Entonces, se cumple que:

1. Si $n = m$ y es $J_{\vec{f}}(\vec{x}) \neq 0$, esto implica que $\vec{f}(K)$ contiene un entorno de la imagen del centro, $\vec{f}(\vec{x}_0)$.
2. Si $n > m$ y $r\left\lfloor J_{\vec{f}}(\vec{x})\right\rfloor = m$, esto implica que $\vec{f}(K)$ contiene un entorno de la imagen del centro, $\vec{f}(\vec{x}_0)$.
   Si $n > m$ y $r\left\lfloor J_{\vec{f}}(\vec{x})\right\rfloor < m$ no puede afirmarse nada.
3. Si $n < m$ es $r\left\lfloor J_{\vec{f}}(\vec{x})\right\rfloor \leq n$ y no puede afirmarse nada.

Demostración:

a) Consideremos en R^n la esfera abierta K de radio r y de centro $\vec{x}_0$:

$$K = \left\{\vec{x} \in R^n / \left|\vec{x} - \vec{x}_0\right| < r\right\}$$

y sea FrK su frontera:

$$FrK = \left\{\vec{x} \in R^n / \left|\vec{x} - \vec{x}_0\right| = r\right\}$$

la adherencia de K, $\overline{K}$, será:

$$\overline{K} = K \cup FrK = \left\{\vec{x} \in R^n / \left|\vec{x} - \vec{x}_0\right| \leq r\right\}$$

b) Consideremos en FrK la función $\vec{g} : R^n \rightarrow R$:

$$\forall \vec{x} \in FrK, \vec{g}(\vec{x}) = \left|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\right| \in R$$

$\vec{g}$ es continua en FrK por serlo $\vec{f}$.

$\vec{g}(\vec{x}) > 0,$ pues $\left|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\right| \geq 0,$ y al ser $\vec{f}$ uno a uno, nunca será $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}_0)$ por lo que $\vec{g}(\vec{x}) = \left|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)\right| > 0$

$\vec{g}$ tiene en FrK un mínimo absoluto m, por ser FrK compacto: $\min(\vec{g}(\vec{x})) = m$

c) Consideremos en R^m la esfera abierta T de radio $\frac{m}{2}$ y centro $\vec{f}(\vec{x}_0)$:

$$T = \left\{ \vec{y} \in R^m / \left| \vec{y} - \vec{f}(\vec{x}_0) \right| < \frac{m}{2} \right\}$$

d) Consideremos en $\overline{K}$ la función $\vec{h} : R^n \to R$:

$\forall \vec{x} \in \overline{K}, \vec{h}(\vec{x}) = \left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{y}_0 \right|,$ para un $\vec{y}_0 \in T$ fijo.

$\vec{h}$ es continua en $\overline{K}$ por serlo $\vec{f}$.

$\vec{h}$ tiene en $\overline{K}$ un mínimo absoluto, por ser $\overline{K}$ compacto, y este mínimo es menor que $\frac{m}{2}$:

$\vec{h}(\vec{x}_0) = \left| \vec{f}(\vec{x}_0) - \vec{y}_0 \right| < \frac{m}{2},$ pues el radio de la esfera es $\frac{m}{2} \Rightarrow \min(\vec{h}(x)) < \frac{m}{2}$,

e) Tal mínimo no se alcanza en la frontera de la esfera K, pues

$$\forall \vec{x} \in FrK, \vec{h}(\vec{x}) = \left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{y}_0 \right| = \left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - \vec{y}_0 + \vec{f}(\vec{x}_0) \right| =$$

$$= \left| (\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0)) - (\vec{y}_0 - \vec{f}(\vec{x}_0)) \right| \geq \left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) \right| - \left| \vec{y}_0 - \vec{f}(\vec{x}_0) \right| > \vec{g}(\vec{x}) - \frac{m}{2} \geq m - \frac{m}{2} = \frac{m}{2}$$

O sea, $\forall \vec{x} \in FrK, \vec{h}(\vec{x}) \geq \frac{m}{2} \Rightarrow$ el mínimo de $\vec{h}$ no se alcanza en la frontera $FrK \Rightarrow$ el mínimo está en un punto $\vec{a}$ del interior K, pues $K \cup FrK = \overline{K}, K \cap FrK = 0$

f) La función $\vec{h}^2(\vec{x}) = \left| \vec{f}(\vec{x}) - \vec{y}_0 \right|^2 = \sum_{j=1}^{m} \left| f_j(\vec{x}) - y_j \right|^2$ tiene en tal punto $\vec{a}$ un mínimo y es además diferenciable en $\vec{x} \in K,$ pues las $f_j,\ j = 1,...,m$ lo son, ya que por hipótesis existen las derivadas parciales $D_k f_j(\vec{a}),\ k = 1,...,n$

g) En tal punto $\vec{a}$ la derivada ha de ser, por tanto, igual a cero:

$$\sum_{j=1}^{m} \left[f_j(\vec{a}) - y_j \right] D_k f_j(\vec{a}) = 0,\ k = 1,...,n$$

que es un sistema de n ecuaciones con m incógnitas:

$$\begin{cases} (f_1(\vec{a}) - y_1).D_1 f_1(\vec{a}) + & (f_2(\vec{a}) - y_2).D_1 f_2(\vec{a}) + & ... + & (f_m(\vec{a}) - y_m).D_1 f_m(\vec{a}) & = 0 \\ (f_1(\vec{a}) - y_1).D_2 f_1(\vec{a}) + & (f_2(\vec{a}) - y_2).D_2 f_2(\vec{a}) + & ... + & (f_m(\vec{a}) - y_m).D_2 f_m(\vec{a}) & = 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ (f_1(\vec{a}) - y_1).D_n f_1(\vec{a}) + & (f_2(\vec{a}) - y_2).D_n f_2(\vec{a}) + & ... + & (f_m(\vec{a}) - y_m).D_n f_m(\vec{a}) & = 0 \end{cases}$$

que podemos expresar matricialmente usando la matriz jacobiana:

$$\begin{bmatrix} D_1f_1(\vec{a}) & D_2f_2(\vec{a}) & .... & D_1f_m(\vec{a}) \\ D_2f_1(\vec{a}) & D_2f_2(\vec{a}) & .... & D_2f_m(\vec{a}) \\ .... & .... & .... & .... \\ .... & .... & .... & .... \\ D_nf_1(\vec{a}) & D_nf_2(\vec{a}) & .... & D_nf_m(\vec{a}) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} f_1(\vec{a})-y_1 \\ f_2(\vec{a})-y_2 \\ ... \\ ... \\ f_m(\vec{a})-y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$$

o sea:

$$\left[J_f(\vec{a})\right]\left(\vec{f}(\vec{a})-\vec{y}_0\right)=\vec{0}$$

Se trata, pues, de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, en donde la matriz jacobiana es la matriz de los coeficientes. Veamos las situaciones que se plantean en función de las dimensiones, n y m, de ambos espacios.

1. Si n = m. En este caso puede ocurrir:
   - Si el jacobiano es no nulo, $J_f(\vec{a}) \neq 0,$ entonces el sistema tiene solución única en virtud del Teorema de Rouché-Fröbenius, y como es homogéneo, esta solución es la trivial:

     $$f_j(\vec{a}) - y_j = 0,\ j = 1,...,m$$

     o sea:

     $$\vec{f}(\vec{a}) = \vec{y}_0 \in T$$

     es decir, en el punto $\vec{a} \in K$ en donde $\vec{h}(\vec{x})$ tiene un mínimo absoluto, es $\vec{f}(\vec{a}) \in T$, por lo cual $T \subseteq \vec{f}(K)$ y $\vec{f}(K)$ contiene un entorno de $\vec{f}(\vec{x}_0)$.
   - Si el jacobiano es nulo, $J_f(\vec{a}) = 0,$ entonces el sistema tendría infinitas soluciones y no podríamos afirmar nada.
2. Si n > m, el rango de la matriz jacobiana ha de ser menor o igual que m, número de las incógnitas del sistema.
   - Si es $r\left[J_f(\vec{a})\right] = m$ el sistema tiene solución única (la solución trivial), por lo que $\vec{f}(K)$ contiene un entorno de $\vec{f}(\vec{x}_0)$.
   - Si es $r\left[J_f(\vec{a})\right] < m$ el sistema tendría infinitas soluciones y no podemos afirmar nada.
3. S n < m, y siendo m el nº de incógnitas, el sistema tendría infinitas soluciones y no podríamos afirmar nada.

Teorema 5:

Sea la función vectorial $\vec{f} : R^n \to R^m$ tal que $\vec{f} \in C^1\ en\ \vec{x}, \forall \vec{x} \in S \subseteq R^n$. Se verifica que:

1. Si $n = m$ y es $J_{\vec{f}}(\vec{x}) \neq 0, \vec{x} \in S$, esto implica que existe un entorno de $\vec{x}$, $N(\vec{x}),$ tal que $\vec{f} : N(\vec{x}) \to \vec{f}(N(\vec{x}))$ es uno a uno.
2. Si $n < m$ y $r\left[J_{\vec{f}}(\vec{x})\right] = n$, esto implica que existe un entorno de $\vec{x}$, $N(\vec{x}),$ tal que $\vec{f} : N(\vec{x}) \to \vec{f}(N(\vec{x}))$ es uno a uno.
   Si $n < m$ y $r\left[J_{\vec{f}}(\vec{x})\right] < n$, no podemos afirmar nada.

3. Si $n > m$ es $r\lfloor J_{\vec{f}}(\vec{x})\rfloor \leq m$ y no puede afirmarse nada.

Demostración:

Sea $x_0 \in S \subseteq R^n$ tal que $J_f(\vec{x}_0) \neq 0$.

Puesto que $\vec{f}$ es continua con derivada continua, existe un entorno $N(\vec{x}_0)$ del punto $\vec{x}_0$ en donde el jacobiano es no nulo:

$$\exists N(\vec{x}_0) \subseteq S \subset R^n / \forall \vec{z} \in N(\vec{x}_0), D_k f_i(\vec{z}) \neq 0$$

Supongamos que hay dos puntos distintos de este entorno con la misma imagen por la función $\vec{f}$, esto es, supongamos que esta función no es uno a uno, y veamos que tal situación implicaría una contradicción.

Sean $\vec{u}, \vec{v} \in N(\vec{x}_0)$ tales que $\vec{u} \neq \vec{v} \ \wedge \ \vec{f}(\vec{u}) = \vec{f}(\vec{v})$. Por ser $N(\vec{x}_0)$ un conjunto conexo, cualquier segmento de extremos $\vec{u}, \vec{v}$, $L(\vec{u}, \vec{v})$, estará contenido en $N(\vec{x}_0)$:

$$L(\vec{u}, \vec{v}) \subset N(\vec{x}_0)$$

por lo que se puede aplicar el teorema del valor medio n-dimensional:

$$\exists \vec{z} \in L(\vec{u}, \vec{v}) \subset N(\vec{x}_0) / \vec{f}(\vec{u}) - \vec{f}(\vec{v}) = \vec{\nabla} f(\vec{z}).(\vec{u} - \vec{v})$$

o sea,

$$0 = \vec{f}(\vec{u}) - \vec{f}(\vec{v}) = \vec{\nabla} f(\vec{z}).(\vec{u} - \vec{v})$$

es decir:

$$f_i(\vec{u}) - f_i(\vec{v}) = D_k f_i(\vec{z}).(u_k - v_k) = 0, \ i = 1,...,m, \ k = 1,...,n$$

obteniéndose en definitiva un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas, que matricialmente, sería:

$$\begin{bmatrix} D_1 f_1(\vec{z}) & D_2 f_1(\vec{z}) & \dots & D_n f_1(\vec{z}) \\ D_1 f_2(\vec{z}) & D_2 f_2(\vec{z}) & \dots & D_n f_2(\vec{z}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_1 f_m(\vec{z}) & D_2 f_m(\vec{z}) & \dots & D_n f_m(\vec{z}) \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ \dots \\ \dots \\ u_n - v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene:

1. Si m = n, siendo $J_f(\vec{x}_0) \neq 0 \Rightarrow D_k f_i(\vec{z}) \neq 0$ y el sistema tiene solución única, la trivial:

   $$u_k - v_k = 0, \ k = 1,...,n$$

   de donde $\vec{u} = \vec{v}$, contra la hipótesis, luego la función $\vec{f}$ es uno a uno.

2. Si n < m, y $r\lfloor J_f(\vec{z})\rfloor = n, \ \forall \vec{z} \in N(\vec{x}_0)$ el sistema admite solución única (trivial), y, al igual que en el caso anterior, la función es uno a uno. Si $r\lfloor J_f(\vec{z})\rfloor < n$ f podría no ser uno a uno.

3. Si n > m en este caso siempre es $r\lfloor J_f(\vec{z})\rfloor \leq m$ y la función no es en general uno a uno. No podríamos afirmar nada.

3. Documentación:

Apóstol, T. M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté. Barcelona, 1998.
Apóstol, T.M.; Calculus, Editorial Reverté. Barcelona, 1991.
Dieudonné, J.; Fundamentos de Análisis Moderno, Editorial Reverté. Barcelona, 1991.
Fleming, W.; Functions of several variables, Springer-Verlag, Berlin, 1994
Rudin, W.; Principios de Análisis Matemático, Editorial Mc Grall Hill, 1990.
Spivak, M.; Calculo en variedades, Editorial Reverté. Barcelona, 1994
Spivak, M.; Calculus, Editorial Reverté. Barcelona, 1988.

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ
titakrmen@hotmail.com